

スプリングバック予測における下負荷面弾塑性モデルと古典混合硬化モデルの比較  
**Comparison of Subloading Surface and Classical Voce–Armstrong Mixed-Hardening Models for U-Bend Springback Prediction**

○正 張 広志<sup>\*1</sup>, 西久保 裕康<sup>\*1</sup>, 米 大海<sup>\*1</sup>, 橋口 公一<sup>\*2</sup>

Guangzhi ZHANG<sup>\*1</sup>, Hiroyasu NISHIKUBO<sup>\*1</sup>, Dahai MI<sup>\*1</sup>, and Koichi HASHIGUCHI<sup>\*2</sup>

<sup>\*1</sup> 計測エンジニアリングシステム株式会社 KEISOKU ENGINEERING SYSTEM CO., LTD.

<sup>\*2</sup> 九州大学名誉教授 Professor Emeritus, Kyushu University

Accurate springback prediction in high-strength steels sheet forming is critical because it determines the final geometry and residual stresses of formed parts. In this study, we performed finite-element simulations of U-bend springback in DP780 dual-phase steel. During forming the sheet experiences tensile loading, unloading, reverse compressive loading, and a second unloading; early yielding often emerges near the end of each unloading stage. Consequently, apart from proper boundary conditions, choosing an appropriate elastoplastic constitutive model is pivotal to realistic springback simulation. Because the Subloading Surface elastoplastic Model (SSM) could reproduce early yielding, we investigated its applicability to springback and compared it with the classical Voce–Armstrong Mixed-Hardening Model (MHM). We confirmed that the final springback shape can be brought close to experiments by tuning material parameters as reported elsewhere. With the classical model, however, this tuning relies on changing the elastic modulus, an adjustment that drives the stress-strain response away from test data. In contrast, SSM permits the yield surface to be approached elastoplastically and captures early yielding via translation of an “elastic core”. By fine-tuning the magnitude of the elastic core translation, we can target the springback amount while still matching the stress-strain curve. Our results demonstrate that SSM can simultaneously fit both the stress-strain behaviour and the final geometry, whereas the classical model can at best reproduce one or the other.

**Key Words :** Subloading surface elastoplastic model, Voce–Armstrong mixed-hardening model, Stress-strain curve fitting, U-bend springback prediction, DP780 dual-phase steel

## 1. 緒 言

高強度鋼板成形におけるスプリングバックを高精度で予測することは、成形後部品の最終形状および残留応力状態を決定するうえで極めて重要である。本研究では、DP780 二相鋼を対象として U 字曲げスプリングバックの有限要素解析を実施した。成形過程で板材は載荷、除荷、逆載荷、さらに再除荷を経るが、各除荷末期にも早期降伏が発生するため、適切な弾塑性構成モデルの選定が重要となる。本研究では、早期降伏を再現できる下負荷面弾塑性モデル（以下 SSM）及び古典的 Voce–Armstrong 混合硬化モデル（以下 MHM）の適用性を比較した。

## 2. 下負荷面弾塑性モデル

SSM では降伏面のみ持つ MHM より、降伏面と相似する下負荷面、弾性コア面及び弾性コア限界面が導入されている。各面におけるテンソル値変数について、応力テンソル  $\sigma$ 、弾性コア（相似中心）の位置テンソル  $c$ 、背応力テンソル  $\alpha$ 、背応力テンソル  $\alpha$  に対する下負荷面の共役応力テンソル  $\bar{\alpha}$  が定義されている。また、 $\sigma_y$  を下負荷面上の応力  $\sigma$  に対する降伏面上の共役応力テンソルとする。 $\bar{n}$  と  $\hat{n}$  をそれぞれ主応力空間における下負荷面と弾性コア面の単位面方向テンソルとする。また、 $\bar{\sigma} \equiv \sigma - \bar{\alpha}$ ,  $\check{\sigma} \equiv \sigma - c$ ,  $\hat{c} \equiv c - \alpha$  と置き換える。下負荷面は降伏面に対する相似性があるため、 $f(\bar{\sigma}) = RF(H)$ ,  $f(\sigma - \bar{\alpha}) = RF(H)$  ( $0 \leq R \leq 1$ ) となる。時間導関数を求めるとき、

$$\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\sigma} - \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\alpha}} - \dot{R}F - R\dot{F} = 0 \quad (1)$$

となる.  $f(\bar{\sigma})$  を同次関数とすると,  $\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \bar{\sigma} = f(\bar{\sigma}) = RF$  となるため,  $\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{RF}{\bar{n} : \bar{\sigma}}$  の関係が得られる. これを式(1)に代入して整理する.

$$\bar{n} : \dot{\sigma} - \bar{n} : \left[ \dot{\alpha} + \frac{\dot{R}}{R} \bar{\sigma} + \frac{\dot{F}}{F} \bar{\sigma} \right] = 0 \quad (2)$$

さらに, 相似関係  $\mathbf{c} - \bar{\alpha} = R(\mathbf{c} - \alpha)$  を用いると,  $\bar{\alpha} = \mathbf{c} - R\mathbf{c} + R\alpha$  となり,  $\bar{\alpha}$  の時間導関数を求めるとき,  $\dot{\alpha} = \dot{\mathbf{c}} - \dot{R}\mathbf{c} - R\dot{\mathbf{c}} + \dot{R}\alpha + \dot{R}\dot{\alpha} = \dot{\mathbf{c}}(1-R) + R\dot{\alpha} - \dot{R}\dot{\mathbf{c}}$  となる. この  $\dot{\alpha}$  を式(2)に代入すると以下の式が得られる.

$$\bar{n} : \dot{\sigma} - \bar{n} : \left[ \frac{\dot{F}}{F} \bar{\sigma} + R\dot{\alpha} + (1-R)\dot{\mathbf{c}} + \frac{\dot{R}}{R} \bar{\sigma} \right] = 0 \quad (3)$$

今回の金属解析用の SSMにおいては, Voce 則及び改良 Armstrong-Frederick 則<sup>(2)</sup>を使用している.

$$F = F_0 \{1 + S_r [1 - \exp(-C_H H)]\} \quad (4)$$

$$\dot{\alpha} = C_k \left( \dot{\varepsilon}_p - \frac{1}{b_k F} \dot{\varepsilon}_p \alpha \right) \quad (5)$$

弾性コアの移動については参考文献<sup>(1)</sup>の発展則を使用している.

$$\dot{\mathbf{c}} = C_e \left( \dot{\varepsilon}_p - \frac{\Re_c}{\chi} \hat{\mathbf{n}} \| \dot{\varepsilon}_p \| \right) = C_e \left( \| \dot{\varepsilon}_p \| \bar{n} - \frac{\Re_c}{\chi} \hat{\mathbf{n}} \| \dot{\varepsilon}_p \| \right) = \| \dot{\varepsilon}_p \| C_e \left( \bar{n} - \frac{\Re_c}{\chi} \hat{\mathbf{n}} \right) = \| \dot{\varepsilon}_p \| \mathbf{f}_c \quad (6)$$

ここで,  $\Re_c = f(\hat{\mathbf{c}})/F(H)$  となる.  $R$  の発展則については参考文献<sup>(2)</sup>の

$$\dot{R} = U_a \exp(U_b \Re_c C_e) \cot \left( \frac{\pi}{2} \frac{\langle R - R_e \rangle}{1 - R_e} \right) \| \dot{\varepsilon}_p \| = U \| \dot{\varepsilon}_p \| \quad (7)$$

を使用している. 式(4),(5),(6),(7)を式(3)に代入した上, 負荷方向が反転するときの等方硬化停滞現象を考慮するために, さらに等方硬化に関する部分を拡張すると以下の式が得られる<sup>(2)</sup>.

$$\begin{aligned} \bar{n} : \dot{\sigma} - \bar{n} : \left[ \frac{F'}{F} \tilde{R}^\nu \langle \tilde{n} : \bar{n} \rangle f_H \bar{\sigma} + R \mathbf{f}_k + (1-R) \mathbf{f}_c + \frac{U}{R} \bar{\sigma} \right] \| \dot{\varepsilon}_p \| &= 0 \\ \dot{R} &= \frac{1}{\tilde{K}} (1 - \tilde{R}^\zeta) \langle \tilde{n} : \dot{\varepsilon}_p \rangle \quad \text{for } \tilde{n} : \dot{\varepsilon}_p > 0 \\ \dot{\tilde{K}} &= C \tilde{R}^{\zeta-1} \langle \tilde{n} : \dot{\varepsilon}_p \rangle, \quad \tilde{n} = \frac{\partial \| \tilde{\varepsilon}_p \|}{\partial \tilde{\varepsilon}_p}, \quad \tilde{\varepsilon}_p = \varepsilon_p - \boldsymbol{\rho} \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} &= (1 - C) \tilde{R}^\zeta \langle \tilde{n} : \dot{\varepsilon}_p \rangle \tilde{n} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで, 塑性ひずみの空間に等方硬化停滞面及び下負荷等方硬化停滞面を  $\| \tilde{\varepsilon}_p \| = \tilde{K}$  と  $\| \tilde{\varepsilon}_p \| = \tilde{R} \tilde{K}$  それぞれ導入した.  $\tilde{K}$  と  $\tilde{R}$  が等方硬化停滞面の大きさ及び等方硬化停滞比であり,  $\boldsymbol{\rho}$  が等方硬化停滞面の中心位置テンソルである<sup>(2)</sup>. そして,  $\langle \cdot \rangle$ が McCauley の括弧である.

異方性を考慮しない問題において, 弹性変形によって生じる応力はヤング率  $E$  とポアソン比  $\nu$  を変数とする4階の弾性テンソル  $\mathbb{E}(E, \nu)$  を用いて,  $\dot{\sigma} = \mathbb{E} : \dot{\varepsilon}_e$  と表せる. ここで,  $\dot{\varepsilon}_e$  が弾性ひずみ速度であり, 全ひずみ速度  $\dot{\varepsilon}$  及び塑性ひずみ速度  $\dot{\varepsilon}_p$  との加算関係 ( $\dot{\varepsilon}_e = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p$ ) を利用すると,

$$\dot{\sigma} = \mathbb{E} : \dot{\varepsilon}_e = \mathbb{E} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p) \quad (9)$$

と書き換える. 従って, 式(9)を式(8)に代入すると, 応力速度とひずみ速度の関係は以下のように求まる.

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\bar{n} : \mathbb{E} : \dot{\varepsilon}}{\bar{n} : \mathbb{E} : \bar{n} + \bar{M}^p} \bar{n}, \quad \bar{M}^p = \bar{n} : \left[ \frac{F'}{F} \tilde{R}^\nu \langle \tilde{n} : \bar{n} \rangle f_H \bar{\sigma} + R \mathbf{f}_k + (1-R) \mathbf{f}_c + \frac{U}{R} \bar{\sigma} \right]$$

$$\dot{\sigma} = \mathbb{E} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p) = \mathbb{E} : \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\bar{n} : \mathbb{E} : \dot{\varepsilon}}{\bar{n} : \mathbb{E} + \bar{n} : \mathbb{E} : \bar{n}} \bar{n} \right) \Rightarrow \mathbb{E} : \dot{\varepsilon} - \frac{\mathbb{E} : \bar{n} \otimes \bar{n} : \mathbb{E}}{\bar{n} : \mathbb{E} + \bar{n} : \mathbb{E} : \bar{n}} : \dot{\varepsilon} = \left( \mathbb{E} - \frac{\mathbb{E} : \bar{n} \otimes \bar{n} : \mathbb{E}}{\bar{n} : \mathbb{E} + \bar{n} : \mathbb{E} : \bar{n}} \right) : \dot{\varepsilon} \quad (10)$$

### 3. 解析条件

解析条件は参考文献<sup>(3)</sup>と同一とした。矩形試験片の寸法は 360 mm × 30 mm であり、図 1 に示すように、これは実験ツールの詳細な寸法を示している。保持力およびパンチストロークは、それぞれ 2.94 kN および 71.8 mm であった。成形プロセス中に発生する摩擦については、クーロンの摩擦法則が仮定され、クーロン摩擦係数は 0.1 に設定した<sup>(3)</sup>。離散化には 2 次ラグランジュ四辺形要素を使用し、平面ひずみ条件下で COMSOL Multiphysics® バージョン 6.3 を使用して計算した。メッシュは図 3 に示すようになり、アスペクト比が 1.1 であった。

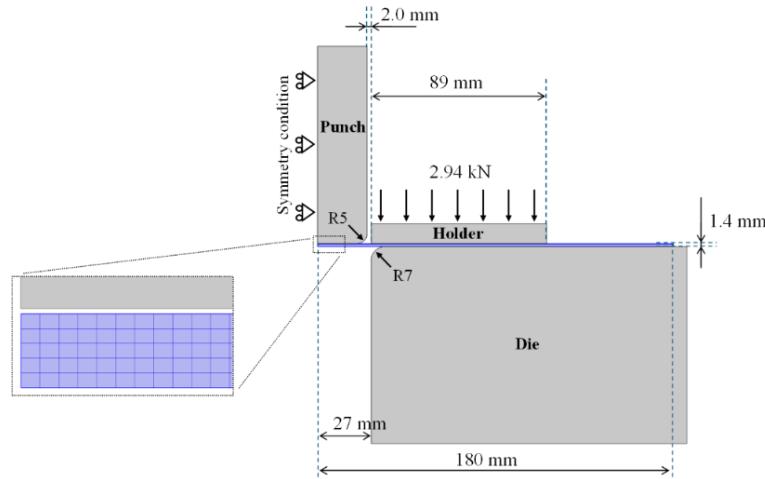


Fig. 1 Boundary conditions, tool dimensions of the U-draw bending test, and mesh pattern.

### 4. 解析結果

U 字曲げシミュレーションを実行するにあたり、材料モデルのパラメータを正確に決定することが不可欠である。COMSOL Multiphysics®には、最適化手法を用いて目的残差関数を最小化するカーブフィッティング機能が備わっている。本研究で使用するパラメータは、DP780 鋼板の引張圧縮試験から得られたひずみ応力の測定値に基づきカーブフィッティング機能を用いて決定した<sup>(3)</sup>。DP780 鋼板は異方性が小さいことが広く指摘されているため、本研究では等方的な Von Mises 降伏面を採用した。各モデルのフィッティング結果を図 1-(a), (c), (e)に示す。SSM を用いた場合には、早期再降伏および過渡的バウシンガー効果が観察され、実験結果と良好に一致した。一方、MHM では純弾性領域の存在や早期再降伏を再現できず、図 2 の破線部分に示すように、実験値との差異が避けられないことが明らかとなった。

スプリングバックの解析結果について、SSM を用いた場合には最終的な変形結果も実験値と良好に一致した(図 1-(b))。一方、MHM では、フィッティング誤差が増大する方向、すなわちヤング率を大きく調整しない限り(図 1-(f))、実験値と一致するスプリングバック後の変形結果を得ることはほぼ不可能であることが明らかとなった(図 1-(d))。図 1-(d)および(f)におけるヤング率はそれぞれ 180 GPa と 205 GPa であり、MHMにおいてはヤング率以外のパラメータは SSM と同一の値を用いた。

Table 1 Parameters of SSM and MHM.

Elastic property		Isotropic hardening			Kinematic hardening		MHM	SSM
$E$ [GPa]	$\nu$	$S_r$	$C_H$	$F_0$ [MPa]	$C_k$ [MPa]	$b_k$		
205	0.3	0.23	9	544	11000	0.41		
Similarity center translation		Evolution of normal yield ratio			Stagnation of isotropic hardening			
$C_e$ [MPa]	$\chi$	$U_a$	$U_b$	$R_e$	$C$	$\zeta$	$\nu$	
6000	0.83	200	0.001	0.1	0.5	3	3	

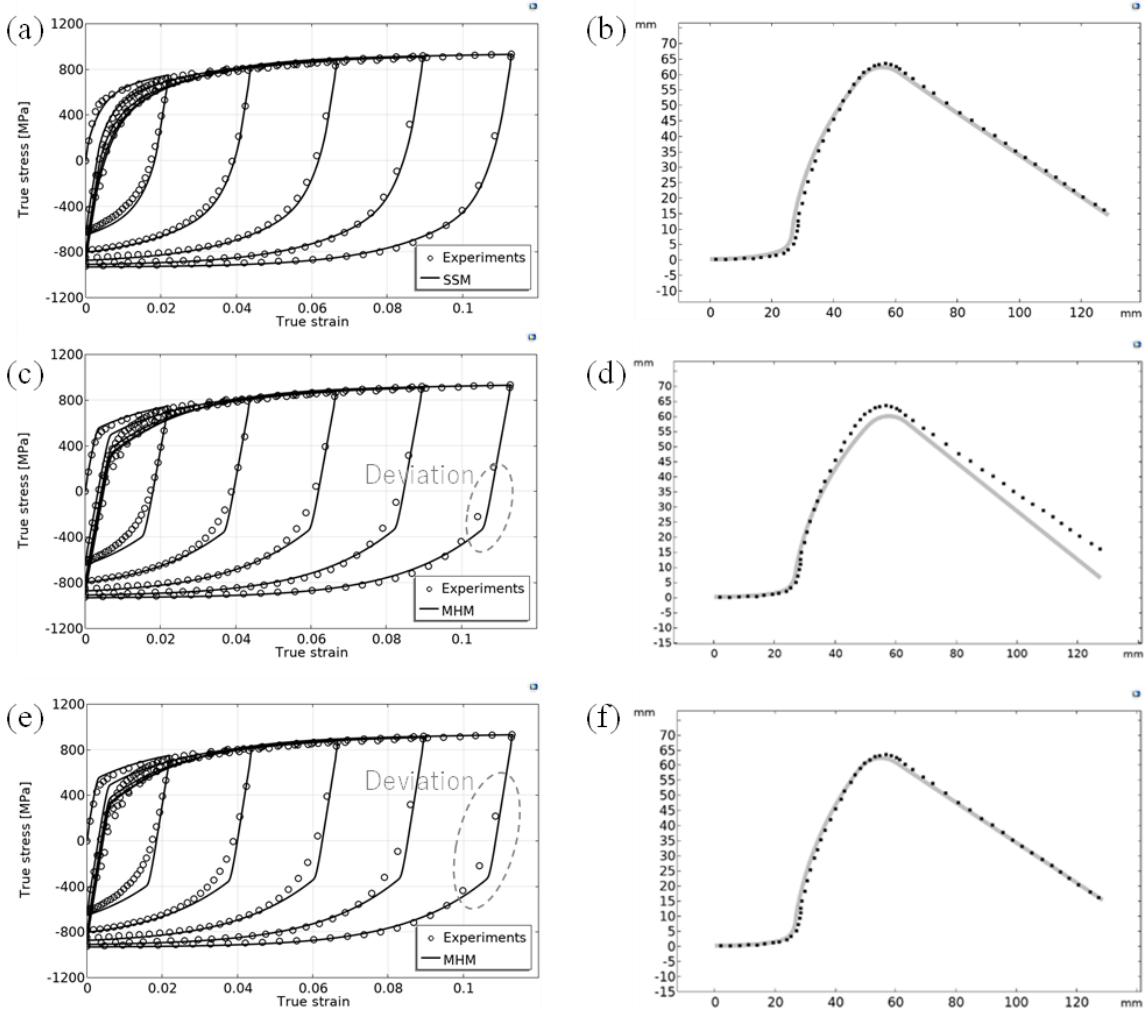


Fig. 2 Parameter fitting results for stress-strain curves of tension-compression test for DP780 and simulation results comparing with experiment measurement. (a) Parameter fitting results using SSM, (b) Simulation results using SSM, (c) Parameter fitting results using MHM with a lower Young's modulus, (d) Simulation results using MHM with a lower Young's modulus, (e) Parameter fitting results using MHM with a higher Young's modulus, (f) Simulation results using MHM with a higher Young's modulus.

## 5. 結 語

本研究では、DP780 二相鋼を対象として U 字曲げスプリングバックの有限要素解析を実施した。U 字曲げの成形過程において板材の多くの領域は、載荷、除荷、逆載荷、さらに再除荷を経験し、各除荷の末期には早期降伏が発生する。その結果、早期降伏現象を再現できる SSM を用いることで、ひずみ応力線図のフィッティング結果およびスプリングバック後の変形結果が同時に実験値と良好に一致することを確認した。一方、古典的な MHM については、従来の報告と同様に、ヤング率を調整することで最終的なスプリングバック形状を実験値に近づけられることを確認した。しかし、ヤング率を高めに調整すると、ひずみ応力線図との整合性が損なわれ、残留応力などの予測に適さなくなり、解析の信頼性が低下することが考えられる。

## 文 献

- (1) Hashiguchi, K., "Foundations of elastoplasticity: subloading surface model", First Edition, New York Springer, 2017.
- (2) Hashiguchi, K., "Foundations of elastoplasticity: subloading surface model", Fourth Edition, New York Springer, 2024
- (3) Lee, J., Lee, J., Barlat, F., Wagoner, R.H., Chung, K., and Lee, M., "Extension of Quasi-Plastic-Elastic Approach to Incorporate Complex Plastic Flow Behavior—Application to Springback of Advanced High-Strength Steels", International Journal of Plasticity, Vol. 45 (2013), pp. 140-159.